

Prüfungsaufgabe 2004 / II

Die Normalparabel p_1 hat die Funktionsgleichung $y = x^2 + 6x + 7$.

- Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes S_1 der Parabel p_1 .
- Die Punkte $P_1 (-3 / 2)$ und $P_2 (1 / -6)$ liegen auf dem Graphen eines nach unten geöffneten Normalparabel p_2 . Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung in Normalform.
- Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Scheitelpunktes S_2 der Parabel p_2 .
- Zeichnen Sie die Graphen von p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1cm.
- Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte T_1 und T_2 der beiden Parabeln p_1 und p_2 . (Rechnen Sie mit $p_2: y = -x^2 - 4x - 1$)

a) Scheitelpunkt S_1 der Parabel p_1 .

Lösungsschema: Umformen in Scheitelpunktform mit quadrat. Ergänzung

$$y = x^2 + 6x + 7$$

$$y = x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 + 7$$

$$y = (x + 3)^2 - 2$$

$$\text{Scheitelpunkt : } S(-3 / -2)$$

b) Normalform der Parabel p_2

Lösungsschema Parabel p_2 : Einsetzen der Koordinatenpunkte in die allgemeine Funktionsgleichung (! nach unten geöffnet)

Funktionsgleichung allgemein: $y = -x^2 + b_1x + c_1$.

Funktionsgleichung I:

$$y = -x^2 + b_1x + c_1$$

$$2 = -(-3)^2 - b \cdot 3 + c$$

$$2 = -9 - 3b + c$$

$$11 + 3b = c$$

Gleichsetzen

$$11 + 3b = -5 - b \quad / +b / -11$$

$$4b = -16 \quad / : 4$$

$$b = -4$$

Funktionsgleichung: $y = -x^2 - 4x - 1$

Funktionsgleichung II:

$$y = -x^2 + b_1x + c_1$$

$$-6 = -1^2 + b \cdot 1 + c$$

$$-6 = -1 + 1b + c$$

$$-5 - b = c$$

Einsetzen in I:

$$c = 11 + 3 \cdot (-4)$$

$$c = -1$$

c) Scheitelpunkt S_2 der Parabel p_2 .

Lösungsschema: Umformen in Scheitelpunktform mit quadrat. Ergänzung

$$y = -x^2 - 4x - 1$$

$$y = -[x^2 + 4x + 1]$$

$$y = -[x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + 1]$$

$$y = -[(x + 2)^2 - 3]$$

$$y = -(x + 2)^2 + 3 \quad \text{Scheitelpunkt : } S_2(-2 / 3)$$

e) Schnittpunkte beider Parabeln

Lösungsschema: Gleichsetzen der beiden Funktionsgleichungen

$$x^2 + 6x + 7 = -x^2 - 4x - 1 \quad / + x^2 + 4x + 1$$

$$0 = 2x^2 + 10x + 8 \quad / : 2$$

$$0 = x^2 + 5x + 4$$

Einsetzen in die Formel (oder quadratische Ergänzung)

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$x_{1,2} = -2,5 \pm \sqrt{2,5^2 - 4}$$

$$x_{1,2} = -2,5 \pm 1,5$$

$$\underline{x_1 = -4} \quad \rightarrow \text{Einsetzen in eine Funktionsgleichung : } T_1(-1 / 2)$$

$$\underline{x_2 = -1} \quad \rightarrow \text{Einsetzen in eine Funktionsgleichung : } T_2(-4 / -1)$$

d) Zeichnung

